

# 指数函数方法及其在非线性发展方程中的应用

刘玉堂, 李富志

LIU Yu-tang, LI Fu-zhi

聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059

School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China

E-mail: liuyutang2008@tom.com

LIU Yu-tang, LI Fu-zhi. Exp-function method and its application to evolution equations. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(2): 68-70.

**Abstract:** Exp-function method is compact and effective in finding solutions of nonlinear wave equations. And through it some new exact solutions are gotten of both of 2+1 dimensional Burgers and KP equations.

**Key words:** exp-function method; Burgers equation; KP equation; exact solution

**摘 要:** 在求解非线性发展方程时, 指数函数方法是一种非常简洁有效的方法。用此方法求解了 2+1 维 Burgers 方程和 2+1 维 KP 方程, 并且得到了一些新的精确解。

**关键词:** 指数函数方法; Burgers 方程; KP 方程; 孤立子解

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.02.019 文章编号: 1002-8331(2009)02-0068-03 文献标识码: A 中图分类号: O175.2

## 1 引言

除了李群方法<sup>[1-6]</sup>、平衡扰动方法<sup>[7]</sup>、F-展开法<sup>[8]</sup>等方法外, 近来又出现了一种求解非线性发展方程的新方法—指数函数方法, 它在求解非线性发展方程时得到了一些新的广义孤波解和周期解<sup>[9]</sup>。这种方法在非线性发展方程中的应用可散见于<sup>[10-11]</sup>等数学物理方面的文献中。

有了数学软件 MAPLE 的帮助, 指数函数方法操作起来即简洁又可以方便地推广到其他非线性发展方程的求解。本文就是把这种方法应用到 2+1 维 Burgers 方程和 2+1 维 KP 方程求解中。2000 年, 阎振亚研究了变系数 KP 方程<sup>[12]</sup>, 2004 年他又研究了以任意常数为系数的 Burgers 方程<sup>[13]</sup>。在现有的其他文献中一些类似的 Burgers 方程也曾经被研究过, 但是它们和本文所研究的方程有所不同<sup>[14-16]</sup>, 对第二个方程也有相同的情况<sup>[17-19]</sup>。

## 2 指数函数方法

为了说明指数函数方法的思想, 考虑下面带有 3 个自变量的方程:

$$\varphi(u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (1)$$

其中  $\varphi$  是关于所给变量的待定函数, 在特定变换下可以把它化成多项式函数。利用变换:

$$u = u(\xi), \xi = kt + lx + my \quad (2)$$

其中  $k, l$  和  $m$  是待定常数。通过此变换方程式(1)可以化为如下方程:

$$\phi(u, ku', lu', mu', k^2u'', klu'', kmu'', lmu'', m^2u'', \dots) = 0 \quad (3)$$

假设上述方程有如下的行波解:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(n\xi)}{\sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r \exp(r\xi)} \quad (4)$$

其中  $d, p$  和  $q$  是待定的整数,  $a_i$  和  $b_j$  是未知常数。因此方程式(4)可以写成:

$$u(\xi) = \frac{a_1 \exp(c\xi) + \dots + a_d \exp(-d\xi)}{b_1 \exp(p\xi) + \dots + b_q \exp(-q\xi)} \quad (5)$$

平衡方程式(3)中的最高阶线性项与最高阶非线性项, 能够得到  $c$  和  $p$  的值。同样平衡方程式(3)中的最低阶线性项与最低阶非线性项可得到  $d$  和  $q$  的值。这样就得到了非线性数学物理方程的新解。应用些方法来研究 2+1 维 Burgers 方程和 2+1 维 KP 方程。

## 3 2+1 维 Burgers 方程

考虑的 Burgers 方程可以写成如下形式

$$u_{tt} + u_x + uu_{xx} - u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (6)$$

其中  $u_t$  表示:  $\frac{\partial u}{\partial t}$ 。利用变换  $\xi = kt + lx + my$  由方程式(6)可以得到:

$$klu'' + l^2 u'^2 + l^2 uu'' - l^3 u''' + m^2 u'' = 0 \quad (7)$$

利用假设式(4), 根据简单地计算可得:

$$u''' = \frac{d_1 \exp[(7p+c)\xi] + \dots}{d_2 \exp[(8p)\xi] + \dots} \quad (8)$$

基金项目: 山东省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Shandong Province of China under Grant No.Q2005A01, No.2004zx16)。

作者简介: 刘玉堂(1974-), 男, 硕士生, 主要研究领域为微分方程; 李富志(1981-), 男, 硕士生, 主要研究领域为微分方程。

收稿日期: 2008-01-07 修回日期: 2008-03-27

$$uu_x = \frac{d_3 \exp[(p+2c)\xi] + \dots}{d_4 \exp[(3p)\xi] + \dots} = \frac{d_3 \exp[(6p+2c)\xi] + \dots}{d_4 \exp[(8p)\xi] + \dots} \quad (9)$$

其中  $d_i, i=1, \dots, 4$ , 是待定系数。通过平衡式子式(8)和式(9)式, 可得:

$$6p+2c=7p+c \quad (10)$$

$$\text{即: } p=c \quad (11)$$

类似地计算方程式(6)的最低阶项可得:

$$u''' = \frac{d_5 \exp[-(7q+d)\xi] + \dots}{d_6 \exp[-(8q)\xi] + \dots} \quad (12)$$

$$uu_x = \frac{d_7 \exp[-(q+2d)\xi] + \dots}{d_8 \exp[-(3q)\xi] + \dots} = \frac{d_7 \exp[(6q+2d)\xi] + \dots}{d_8 \exp[(8q)\xi] + \dots} \quad (13)$$

其中  $d_i, i=5, \dots, 8$  是待定系数。通过平衡式子式(12)和式(13)可得:

$$6q+2d=7q+d \quad (14)$$

$$\text{即: } q=d \quad (15)$$

情形 1 取  $p=c=2$  和  $d=q=1$ , 所求函数变为:

$$u(\xi) = \frac{a_2 \exp(2\xi) + a_1 \exp(\xi) + a_0 + a_{-1} \exp(-\xi)}{b_2 \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)} \quad (16)$$

把式(16)代入式(6), 利用符号运算系统 MAPLE 可得:

$$\frac{1}{A_1} (g_5 \exp(5\xi) + g_4 \exp(4\xi) + g_3 \exp(3\xi) + g_2 \exp(2\xi) + g_1 \exp(\xi) +$$

$$g_0 + g_{-1} \exp(-\xi) + g_{-2} \exp(-2\xi) + g_{-3} \exp(-3\xi) + g_{-4} \exp(-4\xi) + g_{-5} \exp(-5\xi))$$

其中  $A_1$  和  $g_i$  是任意常数。令  $\exp(n\xi)$  的系数等于零, 可得:

$$k = \frac{-m^2 b_{-1} - l^2 a_{-1} + 2l^3 b_{-1}}{lb_{-1}}, l=l, m=m, a_2 = -\frac{b_1 b_0 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}^2}$$

$$a_1 = -\frac{b_1 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}}, a_0 = \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}}, b_2 = \frac{b_1 b_0}{b_{-1}}$$

$$a_{-1} = a_{-1}, b_1 = b_1, b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1}$$

$$u_1(\xi) = \frac{\frac{b_1 b_0 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}^2} \exp(2\xi) - \frac{b_1 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}} \exp(\xi) + \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} + a_{-1} \exp(-\xi)}{\frac{b_1 b_0}{b_{-1}} \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)}$$

若令  $b_{-1}=0$ , 可以得到文献[13]中的特殊情形。

情形 2 取  $p=c=2$  和  $d=q=2$ , 所求函数变为:

$$u(\xi) = \frac{a_2 \exp(2\xi) + a_1 \exp(\xi) + a_0 + a_{-1} \exp(-\xi) + a_{-2} \exp(-2\xi)}{b_2 \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi) + b_{-2} \exp(-2\xi)} \quad (17)$$

把式(17)代入式(6), 利用符号运算系统 MAPLE 可得:

$$\frac{1}{A_3} (g_7 \exp(7\xi) + g_6 \exp(5\xi) + g_5 \exp(5\xi) + g_4 \exp(4\xi) + g_3 \exp(3\xi) +$$

$$g_2 \exp(2\xi) + g_1 \exp(\xi) + g_0 + g_{-1} \exp(-\xi) + g_{-2} \exp(-2\xi) + g_{-3} \exp(-3\xi) +$$

$$g_{-4} \exp(-4\xi) + g_{-5} \exp(-5\xi) + g_{-6} \exp(-6\xi) + g_{-7} \exp(-7\xi))$$

其中  $A_3$  和  $g_i$  是任意常数。令  $\exp(n\xi)$  的系数等于零, 可得:

$$(1) k = \frac{-m^2 b_{-2} - l^2 a_{-2} + 2l^3 b_{-2}}{lb_{-2}}, l=l, m=m, a_2 = 0, a_1 = -\frac{b_{-1} b_0 (4lb_{-2} - a_{-2})}{b_{-2}^2}$$

$$a_0 = -\frac{b_0 (4lb_{-2} - a_{-2})}{b_{-2}}, a_{-1} = \frac{b_{-1} a_{-2}}{b_{-2}}, a_{-2} = a_{-2}$$

$$b_2 = 0, b_1 = \frac{b_{-1} b_0}{b_{-2}}, b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1}, b_{-2} = b_{-2}$$

$$u_2(\xi) =$$

$$\frac{\frac{b_{-1} b_0 (4lb_{-2} - a_{-2})}{b_{-2}^2} \exp(\xi) - \frac{b_0 (4lb_{-2} - a_{-2})}{b_{-2}} + \frac{b_{-1} a_{-2}}{b_{-2}} \exp(-\xi) + a_{-2} \exp(-2\xi)}{\frac{b_{-1} b_0}{b_{-2}} \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi) + b_{-2} \exp(-2\xi)}$$

$$(2) k = \frac{-m^2 b_{-1} - l^2 a_{-1} + 2l^3 b_{-1}}{lb_{-1}}, l=l, m=m, a_2 = -\frac{b_1 b_0 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}^2}$$

$$b_{-1} = b_{-1}, b_{-2} = 0, a_1 = -\frac{b_1 (4lb_{-1} - a_{-1})}{b_{-1}}, a_0 = \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}}$$

$$a_{-1} = a_{-1}, a_{-2} = 0, b_2 = \frac{b_1 b_0}{b_{-1}}, b_1 = b_1, b_0 = b_0$$

通过观察可知, 此情形与情形 1 完全相同。验证了文献 [9-10] 中的观点: 当  $p, c, d, q$  的值大到一定量时, 增大它们的值并不能得到原方程的新解, 即有时新解会出现重复。

## 4 2+1 维 KP 方程

要研究的 KP 方程有如下形式:

$$u_{xx} + u_x^2 + uu_{xx} + u_{xxx} + \alpha^2 u_{yy} = 0 \quad (18)$$

其中  $\alpha$  是任意非零常数。关于此方程的更广泛情况已经在文献 [11] 中讨论过。利用变换  $\xi = kt + lx + my$  方程式(18)可化为:

$$klu'' + l^2 u'^2 + l^2 uu'' + l^4 u^{(4)} + m^2 \alpha u' = 0 \quad (19)$$

根据假设式(4)利用同样的方法可得:

$$p=c, q=d \quad (20)$$

情形 1 取  $p=c=d=q=1$ , 所求函数变为:

$$u(\xi) = \frac{a_1 \exp(\xi) + a_0 + a_{-1} \exp(-\xi)}{b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)} \quad (21)$$

把式(21)代入式(18), 利用符号运算系统 MAPLE 可得:

$$\frac{1}{A_4} (g_4 \exp(4\xi) + g_3 \exp(3\xi) + g_2 \exp(2\xi) + g_1 \exp(\xi) + g_0 +$$

$$g_{-1} \exp(-\xi) + g_{-2} \exp(-2\xi) + g_{-3} \exp(-3\xi) + g_{-4} \exp(-4\xi))$$

其中  $A_4$  和  $g_i$  为任意常数。

令  $\exp(n\xi)$  的系数等于零, 可得:

$$k = -\frac{\alpha^2 m^2 b_{-1} + l^2 a_{-1} + l^4 b_{-1}}{lb_{-1}}, l=l, m=m, a_1 = \frac{1}{4} \frac{a_{-1} b_0^2}{b_{-1}^2}$$

$$a_0 = \frac{b_0 (6b_{-1} l^2 + a_{-1})}{b_{-1}}, a_{-1} = a_{-1}, b_1 = \frac{1}{4} \frac{b_0^2}{b_{-1}}, b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1}, \alpha = \alpha$$

$$\frac{1}{4} \frac{a_{-1} b_0^2}{b_{-1}^2} \exp(\xi) + \frac{b_0 (6b_{-1} l^2 + a_{-1})}{b_{-1}} + a_{-1} \exp(-\xi)$$

$$u_1(\xi) = \frac{\frac{1}{4} \frac{b_0^2}{b_{-1}^2} \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)}{\frac{1}{4} \frac{b_0^2}{b_{-1}^2} \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)}$$

情形 2 取  $p=c=2$ , 和  $d=q=1$ , 所求函数变为

$$u(\xi) = \frac{a_2 \exp(2\xi) + a_1 \exp(\xi) + a_0 + a_{-1} \exp(-\xi)}{b_2 \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi)} \quad (22)$$

把式(22)代入式(18), 利用符号运算系统 MAPLE 可得:

$$\frac{1}{A_5} (g_6 \exp(6\xi) + g_5 \exp(5\xi) + g_4 \exp(4\xi) + g_3 \exp(3\xi) + g_2 \exp(2\xi) +$$

$$g_1 \exp(\xi) + g_0 + g_{-1} \exp(-\xi) + g_{-2} \exp(-2\xi) + g_{-3} \exp(-3\xi) + g_{-4} \exp(-4\xi) +$$

$$g_{-5} \exp(-5\xi) + g_{-6} \exp(-6\xi))$$

其中  $A_5$  和  $g_i$  为任意常数。令  $\exp(n\xi)$  的系数等于零, 可得:

$$k = -\frac{l^4 b_0 + \alpha^2 m^2 b_0 + l^2 a_0}{lb_0}, l=l, m=m, \alpha = \alpha, a_2 = \frac{1}{4} \frac{a_0 b_1^2}{b_0^2}$$

$$a_1 = \frac{b_1 (6l^2 b_0 + a_0)}{b_0}, a_0 = a_0, a_{-1} = 0, b_2 = \frac{1}{4} \frac{b_1^2}{b_0}, b_1 = b_1, b_0 = b_0, b_{-1} = 0$$

$$u_2(\xi) = \frac{\frac{1}{4} \frac{a_0 b_1^2}{b_0^2} \exp(2\xi) + \frac{b_1(6l^2 b_0 + a_0)}{b_0} \exp(\xi) + a_0}{\frac{1}{4} \frac{b_1^2}{b_0} \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0}$$

情形3 取  $p=c=2$  和  $d=q=2$ , 所求函数变为:

$$u(\xi) = \frac{a_2 \exp(2\xi) + a_1 \exp(\xi) + a_0 + a_{-1} \exp(-\xi) + a_{-2} \exp(-2\xi)}{b_2 \exp(2\xi) + b_1 \exp(\xi) + b_0 + b_{-1} \exp(-\xi) + b_{-2} \exp(-2\xi)} \quad (23)$$

把式(23)代入式(18), 利用符号运算系统 MAPLE 可得:

$$\frac{1}{A_6} (g_9 \exp(9\xi) + g_8 \exp(8\xi) + g_7 \exp(7\xi) + g_6 \exp(5\xi) + g_5 \exp(5\xi) + g_4 \exp(4\xi) + g_3 \exp(3\xi) + g_2 \exp(2\xi) + g_1 \exp(\xi) + g_0 + g_{-1} \exp(-\xi) + g_{-2} \exp(-2\xi) + g_{-3} \exp(-3\xi) + g_{-4} \exp(-4\xi) + g_{-5} \exp(-5\xi) + g_{-6} \exp(-6\xi) + g_{-7} \exp(-7\xi) + g_{-8} \exp(-8\xi))$$

其中  $A_6$  和  $g_i$  为任意常数。令  $\exp(n\xi)$  的系数等于零, 可得:

$$(1) k = -\frac{l^4 b_0 + \alpha^2 m^2 b_0 + l^2 a_0}{lb_0}, l=l, m=m, \alpha=\alpha, a_2=0, a_1=0, a_0=a_0$$

$$a_{-1} = \frac{b_{-1}(a_0 + 6l^2 b_0)}{b_0}, a_{-2} = \frac{1}{4} \frac{a_0 b_{-1}^2}{b_0^2}$$

$$b_2=0, b_1=0, b_0=b_0, b_{-1}=b_{-1}, b_{-2} = \frac{1}{4} \frac{b_{-1}^2}{b_0^2}$$

$$u_3(\xi) = \frac{a_0 + \frac{b_{-1}(a_0 + 6l^2 b_0)}{b_0} \exp(-\xi) + \frac{1}{4} \frac{a_0 b_{-1}^2}{b_0^2} \exp(-2\xi)}{b_0 + b_{-1} \exp(-\xi) + \frac{1}{4} \frac{b_{-1}^2}{b_0} \exp(-2\xi)}$$

$$\text{即: } u_3(\xi) = \frac{a_0 \exp(\xi) + \frac{b_{-1}(a_0 + 6l^2 b_0)}{b_0} + \frac{1}{4} \frac{a_0 b_{-1}^2}{b_0^2} \exp(-\xi)}{b_0 \exp(-\xi) + b_{-1} + \frac{1}{4} \frac{b_{-1}^2}{b_0} \exp(-\xi)}$$

令  $b_0 = \frac{1}{2} b_{-1}$ , 可化为:  $u_3(\xi) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{6l^2}{ch\xi + 1}$ 。其中  $ch\xi$  是关于变量  $\xi$  的双曲余弦函数。此解比文献[12]中的解更广泛。

$$(2) k = -\frac{\alpha^2 m^2 b_2 + 4l^4 b_2 + l^2 a_2}{lb_2}, l=l, m=m, \alpha=\alpha, a_2 = \frac{1}{4} \frac{a_2 b_0^2}{b_2^2}$$

$$a_1=0, a_0 = \frac{b_0(a_{-2} + 24l^2 b_{-2})}{b_{-2}}, a_{-1}=0, a_{-2}=a_{-2}$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \frac{b_0^2}{b_{-2}^2}, b_1=0, b_0=b_0, b_{-1}=0, b_{-2}=b_{-2}$$

$$u_4(\xi) = \frac{\frac{1}{4} \frac{a_2 b_0^2}{b_{-2}^2} \exp(2\xi) + \frac{b_0(a_{-2} + 24l^2 b_{-2})}{b_{-2}} + a_{-2} \exp(-2\xi)}{\frac{1}{4} \frac{b_0^2}{b_{-2}^2} \exp(2\xi) + b_0 + b_{-2} \exp(-2\xi)}$$

把以上各解代入对应的方程验证可知, 它们都是所研究方程的解。若令  $a_{-2}=0$ , 可以得到文献[12]的特殊情况。

## 5 结论和讨论

由本文可以看到, 指数函数方法是求解数学物理方程的一种有效方法。此方法的主要优点是可以用来求解类型更复杂的

数学物理方程。此外值得一提的是, 此方法也可以用来求解其它的非线性发展方程。本文所得到的解, 带入原方程中都是成立的。创新点是, 关于 Burgers 方程的两解与文献[13]中的结果不同, 是新解; 对于 KP 方程所得到的解与文献[12]中的解不同, 也是新的精确解。

致谢: 作者衷心感谢聊城大学的刘希强教授, 参考文献中的所有专家、学者!

## 参考文献:

- [1] Liu Xi-qiang. Soliton and elliptical periodic solutions to the modified nonlinear Schrödinger equation[J]. Sys Sci Math Sci, 1999, 12: 263-269.
- [2] Liu Xi-qiang, Song Jiang, Fan Wen-bin, et al. Soliton solutions in linear magnetic field and time-dependent laser field[J]. Commun Nonl Sci Num Simun, 2004, 9: 361-365.
- [3] Liu Xi-qiang, Song Jiang. Exact solutions of multi-component nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations[J]. Applied Mathematics and Computations, 2005, 160: 875-880.
- [4] Bai Cheng-lin, Guo Zong-lin, Zhao Hong. New generalized transformation method and its application in higher-dimensional soliton equation[J]. Commun Theor Phys, 2006, 45: 447.
- [5] Zheng Bin. 2+1 维破裂孤立方程的新孤立解[J]. 量子电子学报, 2006, 23: 451-455.
- [6] Bai Cheng-lin, Zhao Hong. New types of interactions between solitary waves in (2+1)-dimensions[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 375-382.
- [7] He J H. Periodic solutions and bifurcations of delay-differential equations[J]. Phys Lett A, 2005, 347(4/6): 228-230.
- [8] Abdou M A. The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations[J]. Chaos Solitons Fractals, 2007, 31: 95.
- [9] He J H, Wu X H. Exp-function method for nonlinear wave equations[J]. Chaos Solitons Fractals, 2006, 30: 700-708.
- [10] He J H, Abdou M A. New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method[J]. Chaos Solitons Fractals, 2007, 34: 1421.
- [11] El-Wakil S A, Madkour M A, Abdou M A. Application of exp-function method for nonlinear evolution equations with variable coefficients[J]. Phys Lett A, 2007, 369: 62.
- [12] Yan Z Y. Backlund transformation, non-local symmetry and exact solutions for (2+1)-dimensional variable coefficient generalized KP equations[J]. Commun Nonl Sci Num Simu, 2000, 5: 31-35.
- [13] Yan Z Y. The new constructive algorithm and symbolic computation applied to exact solutions of nonlinear wave equations[J]. Physics Letters A, 2004, 331: 193-200.
- [14] Wang Q, Song L N, Zhang H Q. A new coupled sub-equations expansion method and novel complex solutions of (2+1)-dimensional Burgers equation[J]. Applied Mathematics and Computations, 2007, 186: 632-637.
- [15] Wang B D, Song L N, Zhang H Q. A new extended elliptic equation rational expansion method and its application to (2+1)-dimensional Burgers equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33: 1546-1551.
- [16] Wang Q, Chen Y, Zhang H Q. A new Riccati equation rational expansion method and its application to (2+1)-dimensional Burgers equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25: 1019-1028.

(下转 105 页)

B, 该帧为第一个数据帧的冗余帧; 然后, 检查更新帧序号, 并返回初始状态。若帧序号小于 255, 则帧序号加 1; 否则, 帧序号回滚到 1; 若发送完毕, 则发送端复位, 并将帧序号标识为 0。

(2) 在传送链路中, 待传送帧分别被发往两个相互独立、互为冗余的网络 A、B 中。

(3) 在接收端, 针对接收到的不同序号的数据帧, 采用以下 3 种处理方式: (1) 当接收到任一链路上序号为零的帧, 重启接收端; (2) 接收序号为  $psn \oplus 1$ 、 $psn \oplus 2$  的帧时, 则接收该帧进入 Recd\_one 或 Recd\_two 状态, 其中,  $psn$  表示当前接收帧的序号; (3) 若接收帧序号为  $psn$ , 则丢弃该帧, 并进入 RM 冗余状态。

模拟实验仿真结果如图 5 所示。cha\_a、cha\_b 分别表示 A、B 两个冗余网络链路进程。Receive 表示接受端进程, Sender 表示发送端进程。首先, 发送端在系统启动时, 发送了一个 0 号帧通过 cha\_a 传送到 receive, 重启接收端; 在发送第二个 0 号帧的冗余帧时, 重复重启接收端。但是, 在实际的应用环境中, 由于接收端的硬件重启需要一定的时间, 所以不会出现真正的硬件重启; 然后, 发送后续的 1 号帧, 接收端进入接收状态, 在第二个 1 号帧的冗余帧传送到发送端时, 发送端采用 SKRM 算法, 检查该帧序号并确认该帧为冗余帧, 则丢弃该帧, 并进入接

收下一帧的等待状态。这里, AFDX 接收端采用 SKRM 冗余管理算法所进行的冗余管理模拟, 满足了 AFDX 网络数据传输的可靠性要求, 并取得了良好的效果。

## 5 结论

AFDX 协议是一种新型的航空数据总线协议, 其双冗余网络的设置有效地增加了系统的可靠性。经过研究发现到达帧的顺序对接收端系统冗余算法的复杂度、系统资源占用量有着重要的影响。利用 Network Calculus 方法, 对数据帧产生延迟进行了定量分析, 并使用分析结果推导出了数据帧到达接收端的最大延迟时间。为了使冗余管理算法相对简单, 系统资源占用

量相对较小, SkewMax 的必须限定在  $[0, BAG - \sum_{i=1}^n T_i - 500]$ 。最后基于 SkewMax 的确定取值范围, 提出了较为简便有效的 SKRM 冗余管理算法, 并对该算法进行了建模仿真验证。

## 参考文献:

- [1] ARINC. Arinc project paper 664: Aircraft data network, part 7 - avionics full duplex switched ethernet (afdx) network, 2005.
- [2] Charara H, Fraboul C. Modeling and simulation of an avionics full duplex switched ethernet [C]// Proceedings of the Advanced Industrial Conference on Telecommunications/Service Assurance with Partial and Intermittent Resources Conference/E-learning on Telecommunications Workshop, IEEE, 2005.
- [3] Charara H, Scharbarg Jean-Luc, Ermont J, et al. Methods for bounding end-to-end delays on an AFDX networks [C]// Proceedings of the 18th Euromicro Conference on Real-Time Systems (ECRTS), IEEE, 2006.
- [4] Le Boudec Jean-Yves, Thiran P. Network Calculus [C]// LNCS-2050 [S. l.]: Springer Verlag, 2004.
- [5] Täubrich J, von Hanxleden R. Formal specification and analysis of AFDX redundancy management algorithms [C]// LNCS 4680: SAFE-COMP 2007 [S. l.]: Springer-Verlag, 2007.
- [6] Täubrich J, von Hanxleden R. Formal specification and analysis of AFDX redundancy management algorithms [C]// LNCS 4680: SAFE-COMP 2007 [S. l.]: Springer-Verlag, 2007.
- [7] Täubrich J. Formal specification and analysis of a redundancy management system with TLA+ [D]. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Department of Computer Science, 2006.
- [8] Anand M, Vestal S, Dajani-Brown S, et al. Formal modeling and analysis of the AFDX frame management design [C]// Proceeding of the 9th IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing, IEEE, 2006.
- [9] Bengtsson J, Larsen K G, Larsson F, et al. Uppaal-a tool suite for automatic verification of real-time systems [C]// Proceedings of the 4th DIMACS Workshop on Verification and Control of Hybrid Systems, New Brunswick, New Jersey, 22-24 October 1995.

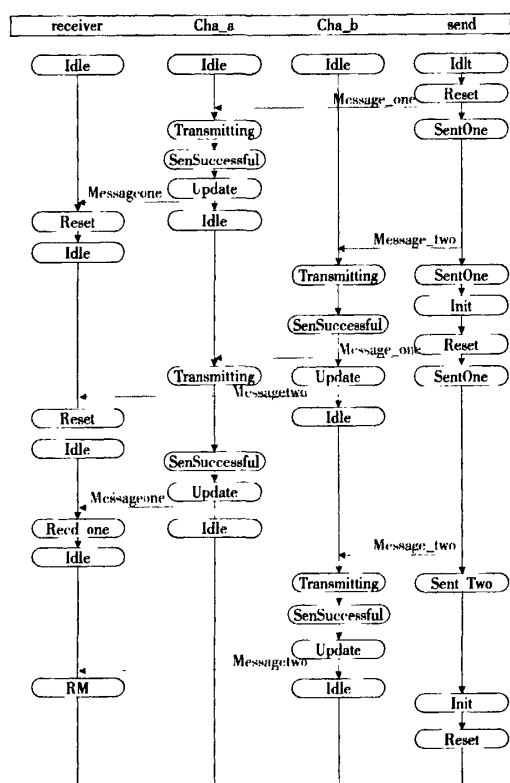


图5 时间序列结构图

(上接 70 页)

- [17] Kong F L, Chen S D. New exact soliton-like solutions and special soliton-like structures of the (2+1)dimensional Burgers equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27: 495-500.
- [18] Emmanuel Yomba. Construction of new soliton-like solutions for

the (2+1)dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 321-325.

- [19] Chen H T, Zhang H Q. New construction of new soliton-like solutions for the (2+1)dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. Appl Math Compu, 2004, 157: 765-773.

作者: 刘玉堂, 李富志, LIU Yu-tang, LI Fu-zhi  
作者单位: 聊城大学, 数学科学学院, 山东, 聊城, 252059  
刊名: 计算机工程与应用 **ISTIC** **PKU**  
英文刊名: COMPUTER ENGINEERING AND APPLICATIONS  
年, 卷(期): 2009, 45 (2)

## 参考文献(19条)

1. Bai Cheng-lin;Guo Zong-lin;Zhao Hong [New generalized transformation method and its application in higher-dimensional soliton equation](#)[期刊论文]-[Communications in Theoretical Physics](#) 2006(3)
2. Liu Xi-qiang;Song Jiang [Exact solutions of multi-component nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon equations](#) 2005
3. Liu Xi-qiang;Song Jiang;Fan Wen-bin [Soliton solutions in linear magnetic field and time-dependent laser field](#) 2004
4. Yan Z Y [Backlund transformation, non-local symmetry and exact solutions for \(2+1\)-dimensional variable coefficient generalized KP equations](#) 2000
5. El-Wakil S A;Madkour M A;Abdou M A [Application of expfunction method for nonlinear evolution equations with variable coefficients](#) 2007
6. He J H;Abdou M A [New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method](#) 2007
7. Chen H T;Zhang H Q [New construction of new soliton-like solutions for the \(2+1\)dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation](#) 2004
8. Emmanuel Yomba [Construction of new soliton-like solutions for the \(2+1\)dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation](#) 2004
9. Kong F L;Chen S D [New exact soliton-like solutions and special soliton-like structures of the \(2+1\)dimensional Burgers equation](#) 2006
10. Wang Q;Chen Y;Zhang H Q [A new Riccati equation rational expansion method and its application to \(2+1\)-dimensional Burgers equation](#)[外文期刊] 2005(5)
11. Wang B D;Song L N;Zhang H Q [A new extended elliptic equation rational expansion method and its application to \(2+1\)-dimensional Burgers equation](#) 2007
12. He J H;Wu X H [Exp-function method for nonlinear wave equations](#)[外文期刊] 2006(3)
13. Abdou M A [The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations](#) 2007
14. He J H [Periodic solutions and bifurcations of delay-differential equations](#) 2005(4/6)
15. Bai Cheng-lin;Zhao Hong [New types of interactions between solitary waves in\(2+1\)-dimensions](#) 2007
16. Zheng Bin [2+1维破裂孤立方程的新孤立解](#)[期刊论文]-[量子电子学报](#) 2006(4)
17. Liu Xi-qiang [Soliton and elliptical periodic solutions to the modified nonlinear Schrodinger equation](#) 1999
18. Wang Q;Song L N;Zhang H Q [A new coupled sub-equations expansion method and novel complex solutions of \(2+1\)-dimensional Burgers equation](#)[外文期刊] 2007(1)

19. [Yan Z Y The new constructive algorithm and symbolic computation applied to exact solutions of nonlinear wave equations](#) 2004

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_jsjgcyyy200902019.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_jsjgcyyy200902019.aspx)